RÓWNANIA STOPNI WYŻSZYCH

I DEFINICJA

Równaniem stopnia n z jedną niewiadomą nazywamy równanie postaci W(x)=0 , gdzie W(x) jest wielomianem zmiennej x stopnia n.

Rozwiązać równanie W(x)=0 , to znaczy to samo, co znaleźć pierwiastki wielomianu W(x). Pierwiastki wielomianu wyznacza się najłatwiej, gdy jest on zapisany w postaci iloczynowej, a zatem przy rozwiązywaniu równań wykorzystujemy znane metody rozkładu wielomianu na czynniki.

Zachęcam do obejrzenia filmu:

https://pistacja.tv/film/mat00927-wprowadzenie-do-rownan-wielomianowych?playlist=928

*Materiał pochodzi z platformy https://pistacja.tv/

Pi-stacja to darmowe wideolekcje z matematyki zgodne z obowiązującą podstawą programową.

II ZADANIA DOTYCZĄCE ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ STOPNI WYŻSZYCH - zadania o numerach nieparzystych są rozwiązane, zadania o numerach parzystych do pracy samodzielnej wg schematu

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie:
a)

$(2x+4)(3-x)(3x-2)=0$

Przy rozwiązywaniu równań zapisanych w postaci iloczynowej wykorzystujemy twierdzenie

$\boldsymbol{a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0\ lub\ b = 0}$ (jest ono prawdziwe dla dowolnej liczby czynników)

$(2x+4)(3-x)(3x-2)=0$
$2x+4=0 \quad lub \quad 3-x=0 \quad lub \quad 3x-2=0$
$2x=-4 \quad lub \quad -x=-3 \quad lub \quad 3x=2$
$x=-2 \quad lub \quad x=3 \quad lub\ x=\frac{2}{3}$

Równanie ma trzy rozwiązania $x=-2 \quad lub \quad x=3 \quad lub\ x=\frac{2}{3}$

b)

$(x+5)^2(2x-8)\left(\frac{1}{2}x+3\right)=0$
$(x+5)^2=0 \quad lub \quad 2x-8=0 \quad lub \quad \frac{1}{2}x+3=0$
$x+5=0 \quad lub \quad 2x=8 \quad lub \quad \frac{1}{2}x=-3$
$x=-5 \quad lub \quad x=4 \quad lub \quad x=-6$

Równanie ma trzy rozwiązania $x=-5\ lub\ x=4\ lub\ x=-6$,
ale cztery pierwiastki ($x=-5$ jest pierwiastkiem dwukrotnym)

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie:

a) $(2x+1)(6-3x)\left(\frac{2}{3}x-6\right)(x+1)=0$

b) $(x-3)^2(2x+1)(x+2)^3=0$

Zadanie 3.

Rozwiąż równanie:

a)

$x^3-2x^2+x=0$ - aby wielomian rozłożyć na czynniki stosujemy wyłączenie *x* przed nawias

$x(x^2-2x+1)=0$

$x=0\ \ lub\ \ x^2-2x+1=0$ – tu można wykorzystać wzór skróconego mnożenia stąd

$(x-1)^2=0$

$x-1=0$

$x=1$

Równanie ma dwa rozwiązania $x=0\ \ lub\ x=1$ (1 jest pierwiastkiem dwukrotnym)

b)

$x^3-6x^2+8x=0$

$x(x^2-6x+8)=0$

$x=0\ \ lub\ \ x^2-6x+8=0$ - otrzymane równanie kwadratowe rozwiązujemy tradycyjnie

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=36-32$

$\Delta=4$

$x_1=\frac{6-2}{2}=2 \qquad x_2=\frac{6+2}{2}=4$

Równanie ma trzy rozwiązania 0, 2, 4

Zadanie 4

Rozwiąż równanie:

a) $x^3+6x^2+9x=0$

b) $x^3+5x^2+4x=0$

Zadanie 5

Rozwiąż równanie:

a)

$x^3+3x^2-4x-12=0$ do przedstawienia w postaci iloczynowej wykorzystujemy grupowanie wyrazów

$x^2(x+3)-4(x+3)=0$

$(x+3)(x^2-4)=0$ korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$(x+3)(x+2)(x-2)=0$
$x+3=0 \quad lub \quad x+2=0 \quad lub \quad x-2=0$
$x=-3 \quad lub \quad x=-2 \quad lub \quad x=2$
Równanie posiada trzy rozwiązania $x=-3$, $x=-2 \quad lub \quad x=2$

b)

$x^3-2x^2+3x-6=0$
$x^2(x-2)+3(x-2)=0$
$(x-2)(x^2+3)=0$
$x-2=0 \quad lub \quad x^2+3=0$
$x=2 \quad lub \quad x^2=-3$
brak rozwiązania

Zadanie 6

Rozwiąż równanie:

a) $x^3+3x^2-2x-6=0$
b) $x^3-2x^2+9x-18=0$

Zadanie 7

Rozwiąż równanie:
a)

$$x^3+5x^2+2x-8=0$$

Widzimy, że nie da się pogrupować wyrazów , a więc szukamy pierwiastka całkowitego wśród dzielników wyrazu wolnego czyli -8

Dzielnikami są $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$

Sprawdzamy liczbę 1 czy jest pierwiastkiem wykorzystując schemat Hornera

	1	5	2	-8
1	1	6	8	0

Liczba 1 jest pierwiastkiem, więc równanie można zapisać w postaci iloczynowej

$$(x-1)(x^2+6x+8)=0$$

I zgodnie z tym co już umiemy przyrównujemy każdy z czynników do 0

$x-1=0$ lub $x^2+6x+8=0$

$x=1$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=36-32$

$\Delta=4$

$x_1=\frac{-6-2}{2}=-4$ $\quad$ $x_2=\frac{-6+2}{2}=-2$

Rozwiązaniami równania są : -4, -2, 1

b)

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$$

Pierwiastkiem całkowitym równania może być liczba ze zbioru $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Czyli stosujemy schemat Hornera

	1	3	-6	-8
1	1	4	-2	-10

Liczba 1 nie jest pierwiastkiem

	1	3	-6	-8
-1	1	2	-8	0

Liczba -1 jest pierwiastkiem , więc zapisuję postać iloczynową

$$(x+1)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$x + 1 = 0$ lub $x^2 + 2x - 8 = 0$

$x = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 + 32$

$\Delta = 36$

$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4$ $x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$

Rozwiązaniami równania są : -4, -1, 2

Zadanie 8

Rozwiąż równania

a) $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

Opracowanie: Jolanta Podziemska - doradca metodyczny z matematyki ODN Kalisz